MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
CONVOCATORIA ORDINARIA JUNIO 2018/2019
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.
b) (1 punto) Resuélvase el sistema para m=1.

Solución:

a) Al ser un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada será el mismo pues al ser cero todos los elementos de la última columna de la matriz ampliada el rango no varía. Veamos el rango de la matriz de coeficientes, para ello calculamos el determinante e igualamos a cero con el fin de obtener los valores de m que lo anulan.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix}=m^2-1 \Longrightarrow |A|=0\ \ Sí\ \ m^2-1=0 \ \Longrightarrow m=\pm 1$$

- Si $m \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0$, por tanto el rango es 3 y al ser un sistema homogéneo se trata de un sistema incompatible (solución trivial $x=y=z=0$). Algunos autores consideran que es un sistema compatible determinado.
- Si $m=\pm 1 \Rightarrow |A|=0$, por lo que tendrá rango menor que 3. por lo que rg(A)=rg(A*)< número de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado y admite solución distinta a la trivial.

b) Para $m=1$, veamos si tiene algún menor de orden 2 distinto de cero.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$$

Por lo que rg(A)=rg(A*)=2< número de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado, para resolverlo necesitamos dos ecuaciones, porque el rango es dos, y dependerá de un parámetro. Número de incógnitas – rango = número de indeterminaciones (3-2=1)

$$\left.\begin{array}{r}-x+y+z=0\\ x+y-z=0\\ x-y-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-x+y+z=0\\ x+y-z=0\end{array}\right\}, \text{ por reducción tenemos } \begin{array}{r}-x+y+z=0\\ \underline{x+y-z=0}\\ 2y \quad =0\end{array}, \Rightarrow y=0,$$

Así $x=z=\lambda$, y la solución es $(x,y,z)=(\lambda,0,\lambda)$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

a) (1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténgase sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
b) (1 punto) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=2$.

Solución:

a) Calculemos primero las asíntotas:
- A.V. No hay ya que no existe x tal que $x^2+4=0$ (es decir, no hay número que anule el denominador).
- A.H.
  $\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2+4}=\frac{8}{\infty}=0,$

  $\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x^2+4}=\frac{8}{\infty}=0.$ Hay una asíntota horizontal: $y=0.$
- A.O. No hay ya que existe asíntota horizontal.

Para el crecimiento calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{-16x}{(x^2+4)^2}\ ,f'(x)=0\ \Rightarrow -16x=0\ \ \Rightarrow x=0.$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Por tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y la función es decreciente en el intervalo $(0,\infty)$. (nota: se puede ver que además tendrá un máximo en (0,2))

b) La función de la recta tangente es: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),\ x_0=2$
$y_0=f(x_0)=f(2)=1,$
$f'(2)=-\frac{1}{2},$ por tanto la recta tangente queda tal que

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$$

mundoestudiante

Ejercicio 3.(Calificación máxima: 2 puntos)
La función real de variable real, $f(x)$, se define según la expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+k & Si\ x\le 0,\\ 1-x^2 & Si\ 0<x\le 3,\\ \dfrac{1}{x-3} & Si\ x>3.\end{cases}$$

a) (1 punto) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.
b) (1 punto) Considerando $k=0$, obténgase el área del recinto acotado delimitando por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en un punto "a", ha de cumplirse:

$$\lim_{x\to a^+} f = \lim_{x\to a^-} f = f(a)$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x+k & Si\ x\le 0,\ continua\ (-\infty,0)\\ 1-x^2 & Si\ 0<x\le 3,\quad continua\ (0,3)\\ \dfrac{1}{x-3} & Si\ x>3.\ continua\ (3,\infty)\end{cases}$$

Una vez analizada la continuidad de cada trozo en su dominio de definición, procedemos a analizar la continuidad en los puntos de cambio de dominio.

- Si $x=0$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^+} 1-x^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^x+k=1+k\\ f(0)=1+k\end{matrix}\right\}\to \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\to \text{para que sea continua}$$

$$1=1+k\ \Rightarrow k=0$$

- Si $x=3$

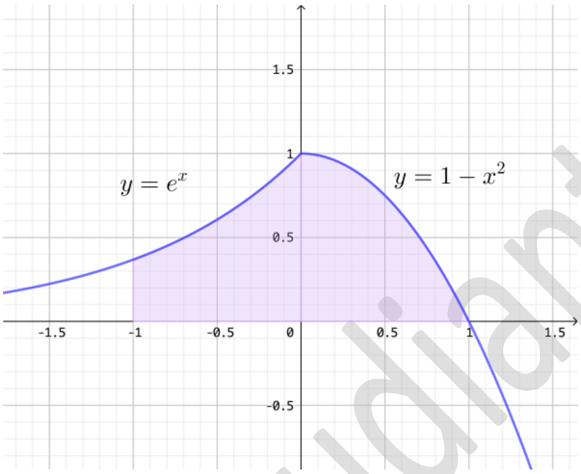
$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-} 1-x^2=-8\\ f(3)=-8\end{matrix}\right\}\to \lim_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim_{x\to 3^-} f(x)\to \text{discontinua de salto infinito}$$

En resumen, si $k=0$ es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$ y si $k\neq 0$ es continua en $\mathbb{R}-\{0,3\}$.

b) Si $k = 0$, la función es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & Si\ x \leq 0, \\ 1 - x^2 & Si\ 0 < x \leq 3, \\ \dfrac{1}{x-3} & Si\ x > 3. \end{cases}$$

Para calcular la integral tenemos que dividirla en dos, ya que en dicho intervalo $(-1,1)$ tenemos dos funciones distintas.



$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{1} (1 - x^2)dx = [e^x]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{e}\right) = 1.29\ u^2$$

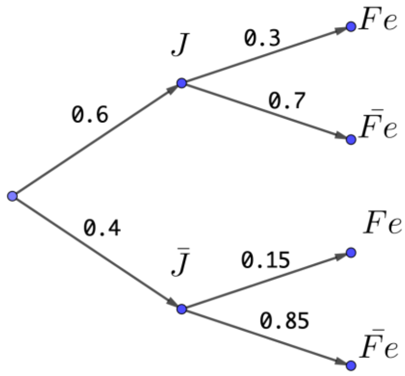
Ejercicio 4.(Calificación máxima: 2 puntos)
De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva al 0.30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0.15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

a) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
b) (1 punto) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución:

Denotamos por $P(J)$ a la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas más tiempo del recomendado ($P(\bar{J})$ su complementario) y $P(Fe)$ a la probabilidad de fracaso escolar ($P(\overline{Fe})$ su complementario). El árbol del problema es el siguiente:

mundoestudiante



a) Tenemos que calcular la probabilidad total.

$$P(Fe) = P(J) \cdot P\left({Fe}/_{J}\right) + P(\bar{J}) \cdot P\left({Fe}/_{\bar{J}}\right) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.15 = 0.24$$

b) Es probabilidad condicionada, por el teorema de Bayes se tiene que

$$P\left({\bar{J}}/_{Fe}\right) = \frac{P(\bar{J} \cap Fe)}{P(Fe)} = \frac{0.4 \cdot 0.15}{0.24} = 0.25$$

Ejercicio 4.(Calificación máxima: 2 puntos)

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5° y 6° de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1.5$ kilogramos.

a) (1 punto) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0.49 kilogramos. Obténgase el numero de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución:

Tenemos una normal $N(\mu, 1.5)$

a) La amplitud del intervalo de confianza se define como $L = 2Z{\alpha}/_{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (es decir, el doble del error permitido). Al ser al 95% se tiene que $Z{\alpha}/_{2} = 1.96$, por lo que:

$$0.49 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1.96 \cdot 1.5}{0.49}\right)^2 = 144$$

b) Si $\mu = 6$ y $n = 225$, entonces $\sigma = \frac{1.5}{\sqrt{225}} = 0.1$

$$P(\bar{X} \geq 5.75) = P\left(Z \geq \frac{5.75 - 6}{0.1}\right) = P(Z \geq -2.5) = P(Z \leq 2.5) = 0.9938 \rightarrow 99.38\%$$

mundoestudiante