MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
CONVOCATORIA ORDINARIA JUNIO 2018/2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.
b) (1 punto) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C , son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución:

a) Primero realicemos la operación $A - 2B$.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el valor de k calculamos el determinante e igualamos a cero:

$$|A - 2B| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2k - 29 = 0 \rightarrow k = \frac{29}{2}$$

Por lo que para $k = \frac{29}{2}$ el determinante es nulo.

b) Para que una matriz admita inversa, esta ha de ser cuadrada (mismo número de filas y columnas) y su determinante debe ser distinto de cero.
Por tanto, la matriz C no puede tener inversa ya que tiene distinto número de filas y columnas.
El producto resultante de $(C^t \cdot C)$ será una matriz 2x2 (ya que es un producto de una 2x3 y una 3x2), por lo que puede que tenga inversa, por tanto realizamos la operación $(C^t \cdot C)$ y comprobamos que el determinante es distinto de cero.

$$D = C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Para calcular la inversa de la matriz hacemos uso de la fórmula $A^{-1} = \frac{(A^t)^*}{|A|}$

En este caso $D = D^t$ por ser una matriz simétrica y su matriz de adjuntos será:

$$(D^t)^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto la inversa es } D^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

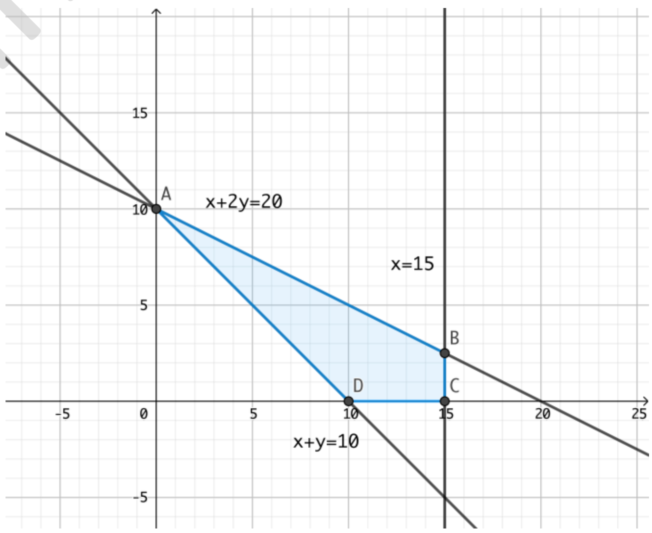
Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) (1 punto) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) (1 punto) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución:

a) Primero nombramos cada variable: x será el número de litros de helado necesarios e y el número de litros de horchata. Según el enunciado las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$, además de $x, y \geq 0$. La región del plano será la siguiente:



b) La función que queremos maximizar (función objetivo) es $f(x,y) = 25x + 12y$. Para ello sustituimos los puntos A,B,C y D del recinto en dicha función y el punto que de el mayor valor será donde se maximice el beneficio.
Los puntos son $A(0,10), B(15,2.5), C(15,0)\ y\ D(10,0)$:

$$f(0,10) = 120$$
$$f(15,2.5) = 405$$
$$f(15,0) = 375$$
$$f(10,0) = 250$$

Por lo tanto obtenemos el máximo beneficio con 15 litros de helado y 2.5 litros de horchata donde el beneficio en sí será de 405 euros.

Ejercicio 3.(Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) (1 punto) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,3)$.
b) (1 punto) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad (U) y la convexidad (∩) de esta función.

Solución:

a) Para obtener la función original tenemos que integrar la derivada.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x^2 - 4x - 6)dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + c,$ además como pasa por $(0,3)$

$f(0) = c = 3$, por lo que la función será $f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3.$

b) Para hallar los extremos relativos igualamos la derivada a cero y sacamos los posibles máximos y mínimos. Y para comprobar si se trata de un máximo o un mínimo hacemos la segunda derivada y comprobamos el signo del punto sustituyendo en ella.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

$$f''(x) = 4x - 4$$

$f''(3) = 8 > 0$, por tanto en $x = 3$ hay un mínimo, el punto $(3, -15)$.

$f''(-1) = -8 < 0$, por tanto en $x = -1$ hay un máximo, el punto $\left(-1, \frac{19}{3}\right)$.

Para el estudio de la curvatura vemos que puntos anulan la segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \ \Rightarrow x = 1$, es un posible punto de inflexión. Ahora tomando valores entre $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ y sustituyendo en la segunda derivada se tiene:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	Convexa (∩)	Cóncava (U)

Por tanto la función es convexa en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava en el intervalo $(1, \infty)$. Hay un punto de inflexión en $\left(1, \frac{-13}{3}\right)$.

Ejercicio 4.(Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.8 \ \ y \ P(A \cap \bar{B}) = 0.1$.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese sí los sucesos A y $\bar{B}$ son independientes. $\bar{B}$ denota el complementario del suceso B.
b) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución:

a) Como $P(B) + P(\bar{B}) = 1$, entonces $P(\bar{B}) = 0.2$. Por el teorema de Bayes (probabilidad condicionada) se tiene que:

$$P\left({}^{A}/_{\bar{B}}\right) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, en este caso sabemos que $P(A \cap \ \bar{B}) = 0.1$, y por otro lado $P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12 \ \neq P(A \cap \ \bar{B})$, por lo que no son independientes.

b) Como $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$, podemos calcular $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = 0.6 - 0.1 = 0.5$
Así, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 $euros^2$.

a) (1 punto) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte esta tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99.2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

b) (1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95%.

Solución:

a) Tenemos una normal $N(\mu, 7)$, ya que la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.
Al ser un intervalo al 99.2% sabemos que $1-\alpha = 0.992$, así $\alpha/_2 = 0.004\ y\ Z\alpha/_2 = 2.65.$
Por lo que nuestro intervalo será:

$$\left(\mu\ \pm Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(34\ \pm 2.65 \cdot \frac{7}{\sqrt{64}}\right) = (31.68\,, 36.32)$$

b) El error se define como $E = Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Al ser al 95% se tiene que $Z\alpha/_2 = 1.96$, por lo que

$$3 = 1.96 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 7}{3}\right)^2 = 20.91 \simeq 21.$$