MATEMÁTICAS II
JUNIO 2019
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

Lo primero es definir las incógnitas:
x: bocadillos
y: refrescos
z: bolsas de patatas

Además al para interpretar una de las ecuaciones del sistema se necesita conocer el precio sin la rebaja del 40%:

$$3€ = (1 - 0.4)p \rightarrow p = 5\ €$$

Con las condiciones iniciales del problema se interpreta que hay que sumarle un bocadillo y una bolsa de patatas más para que el precio se corresponda con el de 19 euros. La segunda ecuación se deduce descontando los 4 euros sobre el precio con error. Y en la última ecuación se tiene en cuenta el descuento calculado anteriormente. Entonces el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} 3z + 4x + 2y = 19 \\ 2z + 3x + 2y = 15 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow (3F_2 - 2F_1) \rightarrow \begin{matrix} 3z + 4x + 2y = 19 \\ x + 2y = 7 \\ x + y = 5 \end{matrix} \rightarrow (F_3 - F_2)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 3z + 4x + 2y = 19 \\ x + 2y = 7 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$x = 3€ \quad y = 2€ \quad z = 1€$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (0.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Determinar los limites laterales $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$

Solución:

a) Al tratarse de una función irracional hay que realizar la inecuación correspondiente para calcular la región donde existe.

$$4x^2 - x^4 \geq 0 \;\rightarrow\; x^2(4-x^2) \geq 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Analizando sobre la inecuación inicial: los valores que lo verifican están en el intervalo $[-2,2]$; por lo tanto:

$$Dom\ x \in [-2,2]$$

b) Lo primero es derivar la ecuación e igualarla a 0 para obtener sus extremos relativos, y posteriormente evaluar en intervalos:

$$f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} \rightarrow f'(x) = 0 \;\rightarrow 8x - 4x^3 = 0 \rightarrow 4x(2-x^2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \;\rightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Para evaluar el crecimiento y decrecimiento se tendrán en cuenta las regiones limitadas tanto por los extremos relativos como por el dominio y la comprobación se realiza en la primera derivada de la función. Si el resultado es positivo resulta que es creciente y si es negativo decreciente.

	$(-2,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},2)$
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente	Decreciente

Como consecuencia, la función es:

- Creciente de: $(-2,-\sqrt{2}) \cup (0,\sqrt{2})$
- Decreciente de: $(-\sqrt{2},0) \cup (\sqrt{2},2)$

c)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2(4-x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{(4-x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{4-x^2}=2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{\frac{4x^2-x^4}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{x^2(4-x^2)}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{4-x^2}=-2$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Dados el punto A(2,1,0) y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$ se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π
b) (1 puntos) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a)

$$d(A,\pi)=\frac{|A\cdot A_x+B\cdot A_y+C\cdot A_z+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}u$$

b) Para obtener el punto más próximo se necesita una recta perpendicular al plano y cortarla con dicho plano.
Esta recta tiene que pasar por el punto A y llevara la dirección del vector director del plano:

$$\begin{cases} A(2,1,0) \\ u_\pi(2,3,4) \end{cases} \to \begin{cases} A\in r \\ r\perp \pi \end{cases} \; En\ paramétricas \to \begin{cases} x=2-2t \\ y=1-3t \\ z=-4t \end{cases}$$

$$r\cap\pi \to 2(2-2t)+3(1-3t)+4(-4t)=36 \quad\to\quad t=-1$$

Volviendo a la recta paramétrica se obtiene el punto pedido.

$$\begin{cases} x=2-2t=4 \\ y=1-3t=4 \\ z=-4t=4 \end{cases}$$

c) El punto simétrico se calcula a partir del obtenido en el anterior apartado M(4,4,4), siendo este el punto medio entre ambos. El punto medio viene a través de la siguiente expresión:

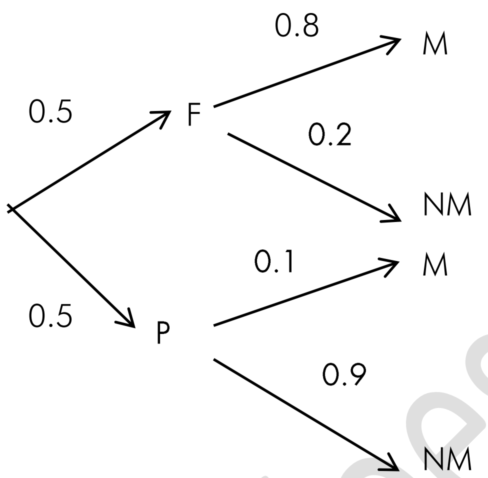
$$M=\frac{A'+A}{2}\ \to A'=2M-A\ \to A'=2\cdot(4,4,4)-(2,1,0)\to A'=(6,7,8)$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Duna compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:

a) Para la resolución de este problema se utiliza el diagrama de árbol:



Donde:
P(F) es la probabilidad del fármaco
P(P) es la probabilidad de placebo
P(M) es la probabilidad de mejora
P(NM) es la probabilidad de no mejora

Entonces:

$$P(M) = P(M|F) \cdot P(F) + P(M|P) \cdot P(P) = 0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.45$$

b) En este caso se está pidiendo la probabilidad condicionada de mejora sabiendo que ha sido tratado con el fármaco. Para ello aplicamos teorema de Bayes.

$$P(F|M) = \frac{P(M|F) \cdot P(F)}{P(M)} = \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.45} = 0.89$$