MATEMÁTICAS II
JUNIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución:

a) Cogemos las 3 primeras columnas y vemos su menor asociado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 \rightarrow \; a^2 + a - 2 = 0 \; \rightarrow a = 1, -2$$

- $Si\ a \neq 1, a \neq -2 \; \rightarrow \text{rango(A)} = 3$

- $Si\ a\ =\ 1,\ A\ = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprobamos los demás menores.

Columnas 1,2 y 4: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =\ 0,$ por ser primera y tercera columna iguales.

$Columnas$ 2,3 y 4: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow rango(A) = 2$

- Si a $= -2,\ \text{A} \ = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ comprobamos los demás menores.

Columnas 1,2 y 4: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ Columnas 2,3 y 4: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Columnas 2,3 y 4: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 2$

b) Para a=0 A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|AM| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Sí existe matriz inversa}$$

$$(AM)^{-1} = \frac{1}{|AM|} Adj\ A^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

a) Solo miraremos la asíntota para $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ya que la función solo está definida para $x > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} \rightarrow \text{aplicamos L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \text{Hay una asíntota horizontal: } y = 0.$$

b) La recta tangente es horizontal $\rightarrow$ la pendiente es $0 \rightarrow f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

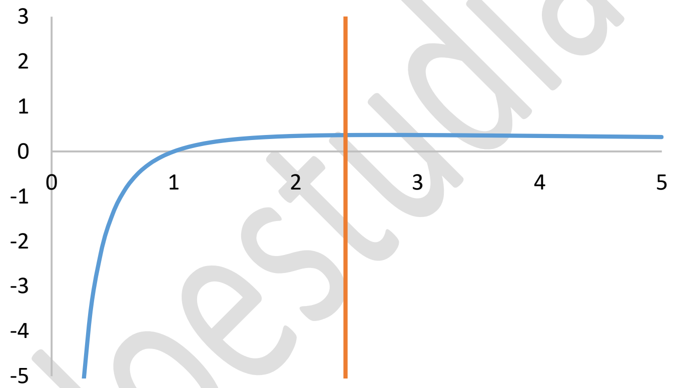
Para comprobar si es un extremo, hacemos la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-1-2(1-\ln x)}{x^3} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$$f''(e) = \frac{-3+2\ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \rightarrow \text{es un máximo relativo.}$$

Hay un máximo relativo en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

c)



Claramente el recinto pedido será entre $x = 1$ y $x = e$

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}u^2$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección$(-1, 0, -1)$, se pide:

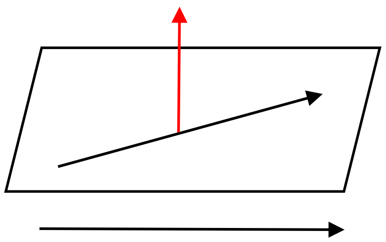
a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s
c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:

a) $\vec{v_r} = (2,-2,1), P_r = (1,3,0), \vec{v_s} = (-1,0,-1), P_s = (2,-5,1)$
$(2,-2,1)K \neq (-1,0,-1)\forall k \in \mathbb{R} \rightarrow$ no son paralelas ni coincidentes
$(2,-2,1) * (-1,0,-1) = -3 \neq 0 \rightarrow$ no son perpendiculares

$$\overrightarrow{p_s p_r} = (-1,8,-1) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow \text{Se cruzan.}$$

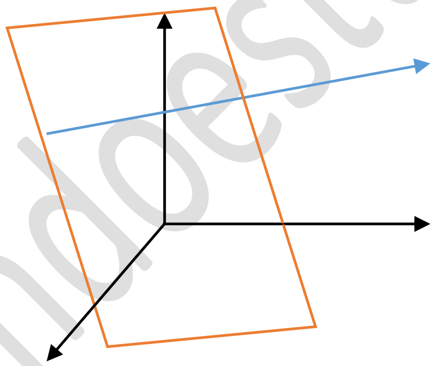
b)



$$\text{Por tanto } \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r} x \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (2,1,-2)$$

$$\text{Como s} \subset \pi \rightarrow p_s \in \pi \rightarrow \pi \equiv 2(x-2) + 1(y+5) - 2(z-1) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \pi \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0$$

c)



Como π y r son perpendiculares, $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r}$ y como pasa por el orígen, $(0,0,0) \in \pi$

$$\pi \equiv 2(x-0) - 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \rightarrow \pi \equiv 2x - 2y + z = 0$$

<u>Ejercicio 4.</u> Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) Esta situación describe una binomial, donde el exito es vivir dentro de 5 años, por tanto $p = 0.1, q = 0.9$ y $n = 10, X \sim Bin(10{,}0.1)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.1^0 0.9^{10} = 0.349$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0.1^1 0.9^9 = 0.387$$

$$Por\ tanto, P(X \geq 2) = 1 - (0.349 + 0.347) = 0.264$$

b) Dado que $n = 200, p = 0.1, q = 0.9$ comprobemos: $np = 20 \geq 5$, $nq = 180 \geq 5$ por tanto $X \sim Bin(200{,}0.1)$ se puede aproximar por $X' \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right) \rightarrow X' \sim N\left(20, \sqrt{18}\right)$ por tanto:

$$P(X \geq 10) = P(X' \geq 9{,}5) = P\left(\overbrace{\frac{X' - 20}{\sqrt{18}}}^{z} \geq \frac{9.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) = P(Z \geq -2.47)$$

$$= P(Z < 2.47) = 0.9932$$